Matemática Discreta
Asignatura optativa de la Licenciatura de Matemáticas (UAM)
Curso 2007-2008

Hoja 4 (Combinatoria con simetrías)

1. ¿Cuántas 5-listas circulares distintas se pueden formar con las letras A, B y C? ¿En cuántas de ellas aparecen las tres letras?

Solución. a) 51; b) 24.

2. Se quieren colorear las aristas de un triángulo equilátero con a lo sumo tres colores dados. Dos coloraciones se identifican si se obtiene una de otra por rotación. ¿Cuántas coloraciones distintas hay?

Solución. 11.

3. Se quiere sentar a 5 hombres y cinco mujeres a una mesa circular. Se considera que los hombres son indistinguibles entre sí, al igual que las mujeres. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer?

Solución. 26.

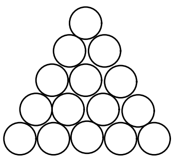
4. Se trata de colorear las caras de un tetraedro identificando las coloraciones que se obtienen unas de otras por un movimiento del tetraedro en el espacio.

a) Describir el grupo de simetrías del tetraedro.

b) Encontrar el número de coloraciones posibles a partir de una paleta de m colores.

Solución. a) G tiene 12 elementos: la identidad, giros de 120 y 240 grados alrededor de los ejes que pasan por un vértice y el centro de la cara opuesta (hay cuatro de estos ejes) y giros de 180 grados alrededor de los ejes que pasan por el centro de una arista y la arista opuesta (hay tres de estos ejes).
b) $\frac{1}{12}(m^4 + 11m^2)$.

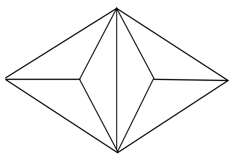
5. Se tienen 15 bolas de tres colores, cinco de cada uno y se apilan como en la figura adjunta.



¿De cuántas formas se puede hacer si identificamos las coloraciones que difieren en una rotación?

Solución. $\frac{1}{3}\binom{15}{5}\binom{10}{5}$.

6. Se quieren colorear los triángulos de la siguiente figura identificando las coloraciones que se obtengan unas de otras por rotaciones y/o reflexiones.



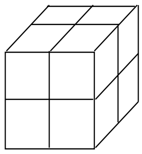
a) Describir el grupo que actúa sobre los triángulos.

b) Encontrar el número de coloraciones posibles a partir de una paleta de 3 colores.

c) Decir cuántas de las coloraciones del apartado anterior usan 2 veces cada color (usar **R**, **N** y **A** como colores).

Solución. a) G tiene cuatro elementos: la identidad, el giro de 180 grados en el plano de la figura y los giros de 180 alrededor de los ejes que pasan por un vértice y su opuesto (hay dos ejes de este tipo).
b) $\frac{1}{4}(3^6 + 3^4 + 2 \cdot 3^3)$.
c) $\frac{1}{4}\left(\binom{6}{2}\binom{4}{2} + 3 \cdot 3!\right)$.

7. Se quieren colorear los 24 cuadrados de la superficie del cubo siguiente



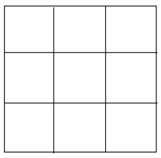
identificando las coloraciones que se obtengan unas de otras "moviendo" el cubo. Encontrar el número de coloraciones que usan exactamente 2 colores.

Solución. $\frac{1}{24}\left(2^{24} + 9 \cdot 2^{12} + 8 \cdot 2^8 + 6 \cdot 2^6\right) - 2$.

8. ¿De cuántas maneras se puede pintar un tablero cuadrado de 2 x 2 con r colores, pintando cada casilla de un color y considerando equivalentes las coloraciones que difieren en una rotación del tablero?

Solución. $\frac{1}{4}(r^4 + r^2 + 2r)$.

9. Se trata de colorear los cuadrados del siguiente tablero



con un cierto número de colores, identificando las coloraciones que difieren en una rotación del tablero.

a) Calcular el número de formas distintas en que se puede hacer con 2 colores. ¿Cuántas de ellas colorean 5 de los cuadrados con un color y cuatro con el otro?

b) Ahora se trata de colorear todos los vértices de la figura (es decir, todas las intersecciones de rectas). De nuevo, identificamos las coloraciones que difieren en una rotación del tablero. Se dispone de dos colores. ¿Cuántas coloraciones hay? ¿Cuántas de ellas colorean 10 de los vértices con un color y 6 con el otro?

Solución. a) Con a lo sumo dos colores hay $\frac{1}{4}(2^9 + 2^5 + 2 \cdot 2^3)$. Con 5 de los cuadrados de un color y cuatro con el otro hay $\frac{2}{4}\left(\binom{9}{5} + 2 \cdot 2 + \binom{4}{2}\right)$.
b) Con a lo sumo dos colores hay $\frac{1}{4}(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4)$. Con 10 de los vértices de un color y 6 con el otro hay $\frac{2}{4}\left(\binom{16}{10} + \binom{8}{5}\right)$.

10. ¿De cuántas maneras se pueden marcar con una X ocho de las dieciséis casillas de un tablero cuadrado de 4 x 4, considerando equivalentes las configuraciones que se obtienen unas de otras por rotaciones o reflexiones del cuadrado?

Solución. $\frac{1}{8}\left(\binom{16}{8} + 3 \cdot \binom{8}{4} + 2 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot \left(\binom{6}{4} + \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2}\right)\right)$.